$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ （ガロアの立場から見たガウスの方法）

益子雅文

名著，『近世数学史談』（高木貞治著）の巻頭「正十七角形のセンセーション」には，ガウスが正十七角形の作図の問題，即ち $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ を平方根のみで表すという問題を初めて解決したときのいきさつと方法が述べられている．この小論では，ガロアの理論を用いてガウスの方法の源泉を探って見たいと思う．

1.　p を素数とするとき，有理数体 Q 上の円分体について次が成り立つ．

ζ_pを 1 の原始 p 乗根とすれば，X^p-1 の分解体は $Q(\zeta_p)$ で与えられる．これは Q の巡回拡大で，次数は $p-1$ である．

{最小多項式は $\mathrm{Irr}(\zeta_p, Q, x) = X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots\cdots+X+1$ であり，ガロア群 $G(Q(\zeta_p)/Q)$ は，$G(Q(\zeta_p)/Q) \to (Z/(p))^\times$ （$\sigma \mapsto s$ ただし $\sigma\zeta_p = \zeta_p^s$）により，法 p の既約剰余類群と同型である.}

$Q(\zeta_{17})$ の場合，例えば $\bar{2}$ で生成される $(Z/(17))^\times$ の部分群を$<\bar{2}>$で表すと，部分群とそれに対応する $Q(\zeta_{17})$ の部分体の列は，次のようになる．

$$
\begin{array}{ccl}
Q(\zeta_{17}) & \text{——} & <\bar{1}> \\
| & & \ | \\
F & \text{——} & <\overline{16}> = \{\bar{1}, \overline{16}\} \\
| & & \ | \\
M & \text{——} & <\bar{4}> = \{\bar{1}, \bar{4}, \overline{13}, \overline{16}\} \\
| & & \ | \\
N & \text{——} & <\bar{2}> = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{16}\} \\
| & & \ | \\
Q & \text{——} & (Z/(17))^\times = <\bar{3}>
\end{array}
$$

ここで $Q(\zeta_{17}) = \left\{\sum_{i=0}^{15} k_i\zeta_{17}^i | k_i \in Q\right\}$．F, M, N はそれぞれ$<\overline{16}>$，$<\bar{4}>$，$<\bar{2}>$で，すなわち$\overline{16}$, $\bar{4}$, $\bar{2}$で動かない $Q(\zeta_{17})$ の元全体であるから，実際に求めてみると次のような形になる．（ζ_{17} を ζ と書いた）．

$$
\begin{aligned}
F = \{&f_1(\zeta^{15}+\zeta^2)+f_2(\zeta^{14}+\zeta^3)+f_3(\zeta^{13}+\zeta^4)+f_4(\zeta^{12}+\zeta^5)+f_5(\zeta^{11}+\zeta^6)+f_6(\zeta^{10}+\zeta^7) \\
&+f_7(\zeta^9+\zeta^8)+f_8 : f_i \in Q\}
\end{aligned}
$$

$$M = \{m_1(\zeta^{15}+\zeta^9+\zeta^8+\zeta^2)+m_2(\zeta^{14}+\zeta^{12}+\zeta^5+\zeta^3)+m_3(\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6)+m_4 : m_i \in Q\}$$

$$N = \{n_1(\zeta^{14}+\zeta^{12}+\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6+\zeta^5+\zeta^3)+n_2 : n_i \in Q\}$$

2.　1 を念頭において，ガウスの方法を分析すると次のようになる．

(1)　ζ として $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ をとっておくと $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)=\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}\in F$.

「$\zeta^{16}+\zeta^{15}+\cdots\cdots+\zeta+1=0$ を用いれば，

$$\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}=-\frac{1}{2}(\zeta^{15}+\zeta^{2})-\frac{1}{2}(\zeta^{14}+\zeta^{3})-\cdots\cdots-\frac{1}{2}(\zeta^{9}+\zeta^{8})-\frac{1}{2}$$」

また $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\notin M$，$[F:M]=2$ であるから，$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ は M 上既約な二次方程式の解になっている．その二次方程式は何か？

$\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}+\alpha\in M$ となる $\alpha\in F$ を考えると，M の元の形から $\alpha=\frac{\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}$ がよいことがわかる．

「$$\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}+\frac{\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}=-\frac{1}{2}(\zeta^{15}+\zeta^{9}+\zeta^{8}+\zeta^{2})-\frac{1}{2}(\zeta^{14}+\zeta^{12}+\zeta^{5}+\zeta^{3})$$
$$-\frac{1}{2}(\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^{7}+\zeta^{6})-\frac{1}{2}$$」

一方 $\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}\cdot\frac{\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}=\frac{\zeta^{14}+\zeta^{12}+\zeta^{5}+\zeta^{3}}{4}\in M$.

よって，$\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}+\frac{\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}=a$，$\frac{\zeta^{3}+\zeta^{14}}{2}+\frac{\zeta^{5}+\zeta^{12}}{2}=c$（記号 c は数学史談に合わせた）

とおくと，$\frac{\zeta+\zeta^{16}}{2}$，$\frac{\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}$ は M 上の方程式 $X^2-aX+\frac{c}{2}=0$ の解となる．

(2)　次に $a+b$，$c+d\in N$ となる b，$d\in M$ を考えるわけであるが，一見して

$b=\frac{\zeta^{15}+\zeta^{9}+\zeta^{8}+\zeta^{2}}{2}$，$d=\frac{\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^{7}+\zeta^{6}}{2}$ とすればよいことがわかる．

$ab=-\frac{1}{4}$，$cd=\frac{1}{4}$ でいずれも Q の数である．

「$$\frac{\zeta+\zeta^{16}+\zeta^{4}+\zeta^{13}}{2}\cdot\frac{\zeta^{15}+\zeta^{9}+\zeta^{8}+\zeta^{2}}{2}=\frac{\zeta^{16}+\zeta^{10}+\cdots+\zeta^{4}+\zeta^{15}}{4}=-\frac{1}{4}$$」

よって a，b は N 上の方程式 $X^2-(a+b)X-\frac{1}{4}=0$ の解として得られ，c，d は $X^2-(c+d)X+\frac{1}{4}=0$ を解いて得られる．

(3)　最後に $a+\mathrm{b}$，$\mathrm{c}+\mathrm{d}\in\mathrm{N}$ を Q 上の二次方程式を解いて得たいのであるが，

$$(a+\mathrm{b})+(\mathrm{c}+\mathrm{d})=-\frac{1}{2}\in\mathrm{Q},\quad (a+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{c}+\mathrm{d})=-1\in\mathrm{Q}$$

したがって $a+\mathrm{b}$，$\mathrm{c}+\mathrm{d}$ は Q の方程式 $\mathrm{X}^2+\frac{1}{2}\mathrm{X}-\frac{1}{4}=0$ の解として得られるのである．

3.　具体的に求めてみよう．

(1)　$a+\mathrm{b}$，$\mathrm{c}+\mathrm{d}$ は 2 −(3)の方程式 $\mathrm{X}^2+\frac{1}{2}\mathrm{X}-1=0$ の解

$$\frac{-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+4}}{2}=\frac{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$$ の一方であるが

$$a+\mathrm{b}=\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{2\pi\times4}{17}+\cos\frac{2\pi\times8}{17}+\cos\frac{2\pi\times2}{17}>0$$

に注意すると $a+\mathrm{b}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$，$\mathrm{c}+\mathrm{d}=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ を得る．

(2)　a，b は $\mathrm{X}^2-\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\mathrm{X}-\frac{1}{4}=0$ の解，c，d は $\mathrm{X}^2-\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\mathrm{X}+\frac{1}{4}=0$ の解である．

$$a-\mathrm{b}=\left(\cos\frac{2\pi}{17}-\cos\frac{2\pi\times4}{17}\right)+\left(\cos\frac{2\pi\times2}{17}-\cos\frac{2\pi\times8}{17}\right)>0$$

等に注意すれば，

$$a=\frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}+\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)^2+1}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$$\mathrm{c}=\frac{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}+\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)^2-1}}{2}=\frac{-1-\sqrt{17}}{8}+\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}.$$

(3)　最後に $\mathrm{X}^2-a\mathrm{X}+\frac{b}{2}=0$ を解く．$2a^2=2+b+2c$ より

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}c}=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}b-\frac{1}{4}c}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

ガウスは，$\frac{1}{2}(p-1)$ が2のべきである一般の場合の一例として，この具体的解法をあげているのである．ガロアの天才は言うまでもないが，40年近くも前にこの解法に達していたガウスの先見性には，ただただ驚くばかりである．

実際の作図について，次は『ガロアの理論』（I. スチュワート著）に紹介されている Richmond の作図法である．

4. (1)改めて次のようにおく：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \zeta^1+\zeta^{16}+\zeta^4+\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^9+\zeta^8+\zeta^2 \;\;(= 2(a+b)),\\
x_2 &= \zeta^3+\zeta^{14}+\zeta^5+\zeta^{12}+\zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6 \;\;(= 2(c+d)),\\
y_1 &= \zeta^1+\zeta^{16}+\zeta^4+\zeta^{13} \;\;(= 2a), \qquad y_2 = \zeta^{15}+\zeta^9+\zeta^8+\zeta^2 \;\;(= 2b),\\
y_3 &= \zeta^3+\zeta^{14}+\zeta^5+\zeta^{12} \;\;(= 2c), \qquad y_4 = \zeta^{11}+\zeta^{10}+\zeta^7+\zeta^6 \;\;(= 2d)
\end{aligned}
$$

このとき $\theta = \dfrac{2\pi}{17}$ とおくと $\zeta^k+\zeta^{17-k} = 2\cos k\theta,\ k = 1, \cdots, 16$ より

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 2(\cos\theta+\cos 8\theta+\cos 4\theta+\cos 2\theta), \qquad x_2 = 2(\cos 3\theta+\cos 7\theta+\cos 5\theta+\cos 6\theta)\\
&y_1 = 2(\cos\theta+\cos 4\theta), \qquad y_2 = 2(\cos 8\theta+\cos 2\theta)\\
&y_3 = 2(\cos 3\theta+\cos 5\theta), \qquad y_4 = 2(\cos 7\theta+\cos 6\theta)
\end{aligned}
$$

x_1, x_2 は Q 上の方程式 $X^2+X-4=0$ の解であり $x_1 > x_2$ である．

「2-(3)，3-(1)より」

y_1, y_2 は N 上の方程式 $X^2-x_1X-1=0$ の解であり $y_1 > y_2$ である．

$$
\begin{aligned}
「\, y_1+y_2 &= \zeta^1+\zeta^{16}+\zeta^4+\zeta^{13}+\zeta^{15}+\zeta^9+\zeta^8+\zeta^2 = x_1\\
y_1y_2 &= (\zeta^1+\zeta^{16}+\zeta^4+\zeta^{13})(\zeta^{15}+\zeta^9+\zeta^8+\zeta^2) = -1\\
y_1-y_2 &= 2(\cos\theta+\cos 4\theta-\cos 8\theta-\cos 2\theta)\\
&= -2(\cos 8\theta-\cos 4\theta+\cos 2\theta-\cos\theta)\\
&= 4\left(\sin 6\theta\sin 2\theta+\sin\frac{3}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta\right) > 0\,」
\end{aligned}
$$

y_3, y_4 は N 上の方程式 $X^2-x_2X-1=0$ の解であり $y_3 > y_4$ である．

(2) ϕ を $\tan 4\phi = 4$ を満たす正の鋭角のうちで最小のものとする．

「2つあるがそのうちの小さい方」

ϕ，2ϕ，4ϕ はすべて鋭角である．

$X^2+X-4 = X^2+4\cot 4\phi X-4 = (X-2\tan 2\phi)(X+2\cot 2\phi)$，$x_1 > 0$ より

$x_1 = 2\tan 2\phi$，$x_2 = -2\cot 2\phi$．

$$X^2-x_1X-1=X^2-2\tan 2\phi X-1=\left(X-\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(X-\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ y_1>y_2\ より$$

$$y_1=\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right),\ y_2=\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$X^2-x_2X-1=X^2+2\cot 2\phi X-1=(X-\tan\phi)(X+\cot\phi),\ y_3>y_4\ より$$

$$y_3=\tan\phi,\ y_4=-\cot\phi.$$

よって　$2(\cos 3\theta+\cos 5\theta)=y_3=\tan\phi,$

$$4\cos 3\theta\cos 5\theta=2(\cos 8\theta+\cos 2\theta)=y_2=\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (*)$$

5.　図のようにOA, OBを一つの円の二本の直交する半径とする.

$\mathrm{OI}=\frac{1}{4}\mathrm{OB}$ とし，$\angle \mathrm{OIE}=\frac{1}{4}\angle \mathrm{OIA}$ とする.

$\angle \mathrm{EIF}=\frac{\pi}{4}$ となるようにAO上に点Fをとる.

AFを直径とする円がOBと交わる点をKとし，Eを中心としKを通る円がOAと交わる点を図のようにN_3, N_5とする．そしてOAに垂直にN_3P_3とN_5P_5をひく.

そのとき $\angle \mathrm{OIA}=4\phi$ でかつ $\angle \mathrm{OIE}=\phi$.

「$\tan\angle \mathrm{OIA}=4$ でかつ $\angle \mathrm{OIA}$ が鋭角であるから」

また

$$\begin{aligned}2(\cos\angle \mathrm{AOP_3}+\cos\angle \mathrm{AOP_5})&=2\left(\frac{\mathrm{ON_3}}{\mathrm{OA}}+\frac{-\mathrm{ON_5}}{\mathrm{OA}}\right)\\&=2\left(\frac{\mathrm{ON_3}-\mathrm{ON_5}}{\mathrm{OA}}\right)\\&=4\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OI}}=\tan\phi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\cos\angle \mathrm{AOP_3}\cos\angle \mathrm{AOP_5}&=-4\frac{\mathrm{ON_3}}{\mathrm{OA}}\frac{\mathrm{ON_5}}{\mathrm{OA}}\\&=-4\frac{\mathrm{OK}^2}{\mathrm{OA}^2}\qquad「\Delta \mathrm{ON_3K}\backsim\Delta \mathrm{OKN_5}」\\&=-4\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}^2}\qquad「\Delta \mathrm{OAK}\backsim\Delta \mathrm{OKF}」\\&=-4\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}\\&=-\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OI}}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)=\tan\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

これらと 4-(2)(＊)をくらべて，$\angle \mathrm{AOP}_3 = 3\theta$，$\angle \mathrm{AOP}_5 = 5\theta$ を得る．したがって A，P_3，P_5 は与えられた円に内接する正17角形の 0 番目，3 番目および 5 番目の頂点であり，$\angle \mathrm{P}_3\mathrm{OP}_5$ を 2 等分すれば θ も得られる．